Απειροστικός Λογισμός Ι, 3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Αν A είναι ένα μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, λ ένας αρνητικός πραγματικός αριθμός και θέσουμε $\Gamma = \{\lambda a : \ a \in A\}$ να δειχθεί ότι $\sup \Gamma = \lambda \inf A$.

2. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία και $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα
α) $a_n \to x$ (δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$).
β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - x| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.
γ) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - x| < 120\varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

3. Δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n = 22 + \dfrac{100}{\sqrt[8]{n}}$. Να δειχθεί, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού, ότι $x_n \to 22$.

4. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες να βρείτε το όριό της.
$a_n = \dfrac{5 + (-1)^n}{n}$,
$\beta_n = \sqrt{n^2 + 8n + 4} - \sqrt{n^2 + 4n + 5}$,
$\gamma_n = \dfrac{2n^3 + 1}{5n^4 + n} + \dfrac{2n^3 + 2}{5n^4 + (n-1)} + \cdots + \dfrac{2n^3 + (n-1)}{5n^4 + 2} + \dfrac{2n^3 + n}{5n^4 + 1}$,
$\delta_n = \sqrt[n]{7^n + 8^n + 10^n}$,
$\varepsilon_n = \dfrac{7^n + 5^n}{4 \cdot 7^n + 6^n}$.

5. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες να βρείτε το όριό της.
$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$,
$\beta_n = \sqrt[n]{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n}$,
$\gamma_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$,
$\delta_n = \dfrac{\cos(n^2) + \sin(\sqrt{n})}{n}$,
$\varepsilon_n = \sqrt[n]{4^n + 6^n + 7 \cdot 8^n + 10^n}$,
$\zeta_n = \dfrac{1^1 + 2^2 + \cdots + n^n}{n^n}$.